Distributions

Rappel : Nous avons introduit la "fonction"

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\,d\omega = \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{-x^2/4\alpha}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

dont la propriété principale est

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\delta(x'-x)\,dx' = f(x)$$

La notion de distribution a été introduit afin de donner un sens mathématique à $\delta(x)$ et à d'autres "fonctions" similaires manipulées par les physiciens.

§1. Espace $\mathcal{D}$

Différentes classes de distributions sont engendrées par différentes classes de fonctions dites "fonctions test". Nous allons travailler avec les fonctions test qui sont indéfiniment dérivables qui s'annulent à l'extérieur d'une intervalle finie dans $\mathbb{R}$.

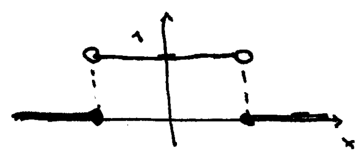
Déf. 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes sur $\mathbb{R}$. Le support de f, notée $\operatorname{supp} f$ est l'adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq 0$:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

$\operatorname{supp} f$ est donc un ensemble fermé en dehors duquel f est nulle et c'est le plus petit ayant cette propriété.

Exemple 2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Alors $\operatorname{supp} f = [-1, 1]$

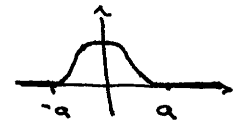
Déf. 3. On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables et à support borné. Dans certains livres $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Comme $\operatorname{supp} f$ est fermé par définition, on peut remplacer dans Déf. 3 support borné par support compact. En effet pour qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ soit compact il faut et il suffit qu'il soit fermé borné.

Trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ n'est pas tout à fait évident. Par exemple $f(x)$ de l'Exemple 2 ne marche pas car elle n'est pas indéfiniment dérivable (même n'est pas continue).

<u>Exemple 4</u>. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{a^2-x^2}} & \text{si } |x|<a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



où $a>0$, alors $\varphi \in \mathcal{D}$. Notons que pour une telle fonction φ, la série de Taylor en $x=a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

est convergente (car tous $\varphi^{(n)}(a)=0$) mais sa somme ne représente pas la fonction. Ce phénomène se produira pour toute fonction de $\mathcal{D}$.

<u>Propriétés de $\mathcal{D}$</u>

- $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel de dimension infinie, car
  i). si $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow f+g \in \mathcal{D}$
  ii). si $f \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{D}$
- si $\varphi \in \mathcal{D}$, sa dérivée $\varphi' \in \mathcal{D}$.
- si $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est indéfiniment dérivable ($\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$), alors $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$. En effet $\alpha\varphi$ est indéfiniment dérivable et $\operatorname{supp} \alpha\varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$.

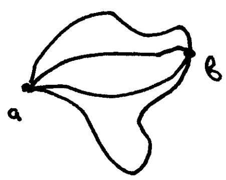
§2. Espace $\mathcal{D}^*$

<u>Déf. 5</u> Une <u>distribution</u> est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$.

Expliquons la terminologie :

i). <u>Fonctionnelle</u> est une application qui associe un nombre à une fonction.

<u>Exemple</u>



Considérons les trajectoires qui relient a et b (2 points dans le plan xy). Elles peuvent être considérées comme différentes fonctions $y = f(x)$ dont le graph passe par a et b. Longueur de trajectoire est un exemple d'une fonctionnelle.

<u>Exemple</u>

Fonctionnelle de l'action en mécanique lagrangienne

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q})\, dt$$

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2}{2} - V(q)$$

Minimisation de $S \longrightarrow$ équation du mouvement

ii). <u>Linéarité</u> signifie que si $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est une distribution, alors (en notant $\underset{\mathcal{D}}{\varphi} \overset{T}{\longmapsto} \underset{\mathbb{C}}{\langle T, \varphi\rangle}$)

$$\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi\rangle + \langle T, \psi\rangle \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

$$\langle T, \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Les fonctionnelles dans les exemples précédents ne sont <u>pas</u> linéaires. Exemple d'une fonctionnelle linéaire :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\, dx .$$

iii). <u>Continuité</u> signifie que si $\{\varphi_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$, $\varphi \in \mathcal{D}$ et si $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, alors la suite des nombres complexes $\langle T, \varphi_n\rangle$ converge vers $\langle T, \varphi\rangle$.

Notion de convergence dans $\mathcal{D}$ dépend du choix de la "distance" entre les éléments de $\mathcal{D}$.

Exemples de "distances" :

$$d_1(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi - \psi| \, dx$$

$$d_2(\varphi, \psi) = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)|$$

. . . . .

Donc la continuité dépend également de la distance choisi (on peut avoir distances non-équivalentes).

Dans tous les cas, la continuité peut être formulée comme

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{entraine} \quad \lim_{n \to \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

<u>Déf. 6.</u> L'ensemble des distributions est noté $\mathcal{D}^*$. C'est un espace vectoriel, dans lequel la somme de deux distributions et le produit par un nombre sont définis par

$$\langle S + T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle$$

$$\langle \lambda S, \varphi \rangle = \lambda \langle S, \varphi \rangle$$

$$\forall S, T \in \mathcal{D}^*, \ \varphi \in \mathcal{D}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

§3. Exemples de distributions.

1). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\int_a^b |f(t)| \, dt < +\infty$). A la fonction f
$(a<b)$
on peut associer une distribution, notée T_f, définie par:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) \, dt \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Cette intégrale a un sens car φ es nulle à l'extérieur d'un ensemble borné.

2). La distribution δ de Dirac est définie par:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\langle \delta_{(a)}, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad \text{(au point } a\text{)}.$$

3). Distribution "valeur principale de Cauchy", notée $\mathcal{P}\frac{1}{t}$ est définie par

$$\langle \mathcal{P}\tfrac{1}{t}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0,\, \varepsilon>0} \int_{|t|>\varepsilon} \varphi(t)\frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right\}$$

Cette limite existe car si $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$, alors

$$\int_{|t|>\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt$$

$$+ \underbrace{\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)}{t}\,dt}_{\varphi(0)\ln|t|\,\Big|_{-R}^{-\varepsilon}} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(0)}{t}\,dt}_{\varphi(0)\ln|t|\,\Big|_{\varepsilon}^{R}} =$$

$$= \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt,$$

d'où en remarquant que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ existe et est égale à $\varphi'(0)$, on obtient

$$\langle \mathcal{P}\tfrac{1}{t}, \varphi\rangle = \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt.$$

On remarquera que l'existence de la limite est due à la compensation de 2 intégrales divergentes.

§4. Opérations sur les distributions

1). Soit $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $C^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, f' est continue). Il est facile de vérifier que $\forall \varphi\in\mathcal{D}$ (voir §3.1):

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\,dt = \underbrace{f(t)\varphi(t)\Big|_{t=-\infty}^{t=-\infty}}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ car } \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})} - \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)\,dt =$$

$$= -\langle T_f, \varphi'\rangle.$$

Ceci conduit à la définition suivante:

Déf. 7. Soit T une distribution. Sa dérivée T' est définie par

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Le membre de gauche est défini par le membre de droite qui est linéaire et continu en φ. En effet si $\varphi_n \to \varphi$ lorsque $n \to \infty$, on sait que $\varphi'_n \to \varphi$.

Par récurrence, on définit pour tout entier $k > 0$, la k-ième dérivée de $T \in \mathcal{D}^*$ par

$$T^{(k)} = \left(T^{(k-1)}\right)'.$$

On aura donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle.$$

Exemple 8. Considérons la distribution δ de Dirac (§3.2). On a:

$$\langle \delta'_{(a)}, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} -\varphi'(a),$$

$$\langle \delta^{(k)}_{(a)}, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} (-1)^k \varphi^{(k)}(a).$$

Remarque 9. Toute distribution est donc indéfiniment dérivable! En particulier, si f est une fonction localement intégrable, sa dérivée au sens des distributions, $(T_f)'$, existe même si f elle-même n'est pas dérivable (même si f n'est pas continue).

2). Multiplication des distributions.

Nous avons vu que les distributions sont "mieux" dérivables que les fonctions. En revanche, on ne peut pas en général multiplier 2 distributions entre elles. Cependant si $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}^*$, le produit αT^* a un sens et $\alpha T \in \mathcal{D}^*$: si $\varphi \in \mathcal{D}$ on posera:

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle \overset{\text{déf}}{=} \langle T, \alpha \varphi \rangle$$

Comme dans le cas de dérivation, le membre de gauche est défini par le membre de droite de l'égalité.

3). Changements de variable : translation

Nous allons s'inspirer de la distribution T_f (§3.i
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est localement intégrable et $\varphi \in \mathcal{D}$, alors

$$\langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{translatée} \\ \text{de } T_f}}{\tau_a T_f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\,\varphi(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x-a=y \\ dx = dy \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi(y+a)\,dy = \langle T_f, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{translatée} \\ \text{de } \varphi}}{\tau_{-a}\varphi} \rangle$$

Donc il est naturel de définir pour $T \in \mathcal{D}'$ la distribution translatée $\tau_a T$ par :

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

le membre de gauche étant défini par le membre de droite.

4). Changements de variables : dilatation.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et f localement intégrable, alors

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)\,\varphi(x)\,dx}_{\langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distribution} \\ \text{dilatée}}}{{}_\lambda T_f}, \varphi \rangle} = \underbrace{\int f(x)\,\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\frac{dx}{|\lambda|}}_{\langle T_f, \varphi_{1/\lambda}(x) \rangle} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\varphi_{1/\lambda}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Il est donc naturel de définir pour $T \in \mathcal{D}'$ la distribution dilatée par

$$\langle {}_\lambda T, \varphi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{|\lambda|} \langle T, \varphi_{1/\lambda} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

<u>Exemple 1e</u> : ${}_\lambda\delta = \frac{1}{|\lambda|}\delta$ car $\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle {}_\lambda\delta, \varphi \rangle = |\lambda|^{-1} \langle \delta, \varphi_{1/\lambda} \rangle = |\lambda|^{-1}\varphi(0) = |\lambda|^{-1} \langle \delta, \varphi \rangle$$

Autrement dit, la "fonction" δ de Dirac vérifie

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(x)$$

§5. Support d'une distribution

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert. On dit qu'une distribution T est nulle dans Ω si $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, ayant son support dans Ω, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

<u>Exemple 11</u>. δ est nulle dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car si $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $0 \notin \operatorname{supp} \varphi$ et donc $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$.

<u>Déf. 12</u>. La réunion de tous les ouverts où T est nulle est le plus grand ouvert où T est nulle. Le complémentaire de cet ouvert (qui est donc un ensemble fermé) est appelé le support de T, noté $\operatorname{supp} T$.

<u>Exemple 13</u>
i). $\operatorname{supp} \delta_{(a)} = \{a\}$
ii). $\operatorname{supp} \mathcal{P}\frac{1}{x} = \mathbb{R}$ ← montrez-le !